

Chap. 10 전도에 의한 열전달 (Heat Transfer by Conduction)

* 제 10 장의 전제 조건

- 고체가 전자기파에 대해 투명하여 복사에 의한 열전달 효과가 무시되는 경우
- 균일한 등방성(isotropic) 고체에서 전도에 의한 열흐름

* 제 10 장의 학습 내용

- 전도에 대한 일반 법칙
- 고체 내의 온도 분포가 시간에 따라 변하지 않는 정상 상태(steady state)의 열전도
- 온도 분포가 시간에 따라 변하는 비정상 상태(unsteady state)의 열전도

10.1 전도의 기본 법칙

- * Fourier 법칙: 열 플럭스와 온도 구배 사이의 비례 관계
 - x 방향으로 정상 상태 일차원 흐름에 대한 Fourier 법칙

$$\boxed{\frac{dq}{dA} = -k \frac{dT}{dx}}$$

q: 표면에 직각 방향으로의 열유량(열 흐름 속도)

A: 표면의 면적

T: 온도

x: 표면에서 직각 방향으로의 거리

k: 비례 상수 → 열전도도 (thermal conductivity)로 정의됨

- * 등방성 물질에서 3방향으로의 열흐름에 대한 Fourier 법칙

- 등방성 물질의 정의: 열전도도 k가 모든 방향에 대해 같은 물질을 칭함.

- 비등방성 물질의 예: 정육면체가 아닌 결정, 나무와 같은 층상 물질, 섬유상 고체 등

$$\frac{dq}{dA} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -k \nabla T$$

→ 플럭스 벡터 dq/dA 는 온도 구배에 비례하고 방향이 반대임
(열은 온도 하강 방향으로 흐름)

10.1 전도의 기본 법칙

* 열전도도(thermal conductivity)

- Fourier 법칙에서의 비례 상수를 열전도도라 정의
- 뉴턴 점도 μ 와 같은 물질의 전달 특성 중 한 가지
- 뉴턴의 점도 법칙: 전단 응력은 속도 구배에 비례하며, 비례 상수는 점도(viscosity)로 정의됨

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} \quad \xrightarrow{\text{Analogy}} \quad \frac{dq}{dA} = -k \frac{dT}{dx}$$

- 열전도도의 단위: dq/dA 의 단위는 $[W/m^2]$, 온도 구배의 단위는 $[K/m]$ 이므로 열전도도 k 의 단위는 $[W/(m \cdot K)]$ 또는 $[Btu/(ft \cdot K \cdot h)]$ 이 됨

* 열전도도의 온도 의존성

- 광범위한 온도 구배의 범위에서 k 는 독립적
- 좁은 범위의 온도에서 k 는 일정하지만 큰 온도 구간에서 k 는 다음과 같은 선형성을 보임 (a, b : 실험 상수)

$$k = f(T) \quad \xrightarrow{\quad} \quad k = a + b T$$

- 선형 온도 법칙의 예외: 다공성 고체의 경우 고체 내부의 빈 공간에 복사 열전달이 발생

10.1 전도의 기본 법칙

* 다양한 물질의 열전도도

- 고체의 열전도도는 범위가 넓음
- 금속의 열전도도는 온도에 따라 거의 일정하거나 약간 감소함
- 유리 및 비다공성 물질의 열전도도 값 = $0.35 - 3.5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$
- 액체의 열전도도: 고체에 비해 낮으며 섭씨 10도 상승 시 3-4% 감소
- 기체의 열전도도: 액체에 비해 한 자리수 정도 낮으며 온도에 따라 급격히 증가됨
- 기체의 경우 10 bar까지는 압력에 무관하며 고압에서 k는 압력에 비례하여 약간 증가

고체	스테인레스 강	17 W/m·°C
	연강	45 W/m·°C
	구리	380 W/m·°C
	은	415 W/m·°C
액체	대부분의 값	0.17 W/m·°C
	물(예외)	0.5-0.7 W/m·°C
기체		0.007 W/m·°C

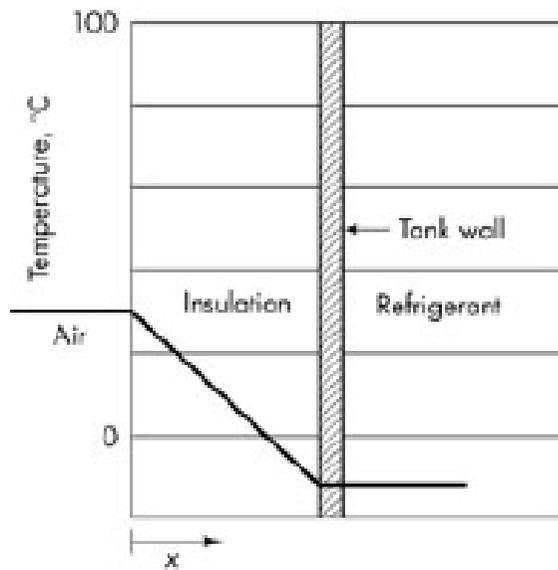
* 단열재: 낮은 열전도도를 갖는 물질들로, 파이프, 반응기, 건물 등에 활용되며 k 값이 공기와 유사함

- 예) 유리 섬유, 고분자 폼(foam)과 같은 다공성 물질의 기공에 공기가 존재하여 대류를 방지함

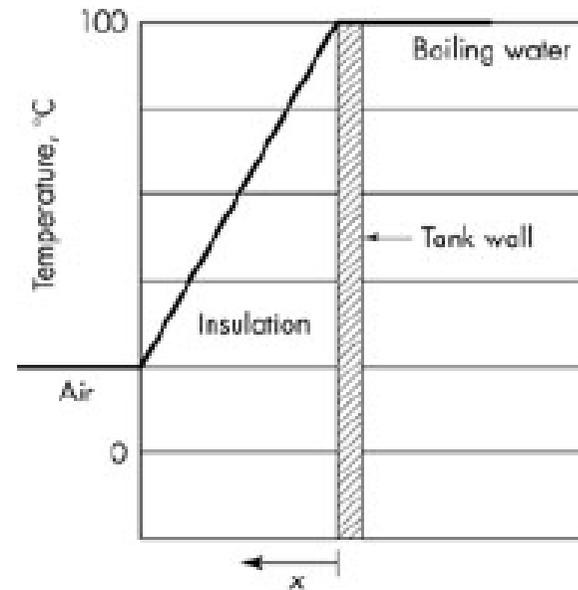
10.2 정상 상태 전도

* 정상 상태 열전도(steady state heat conduction)

- 정상 상태(steady state): 시간에 따른 축적항이 0인 경우에 해당
- 정상 상태 열전도의 경우 온도 구배가 선형으로 감소함
- 정상 상태 열전도의 예(절연 탱크의 외부 온도 구배)



탱크 내로의 열흐름
(탱크 내의 냉각제가 존재)



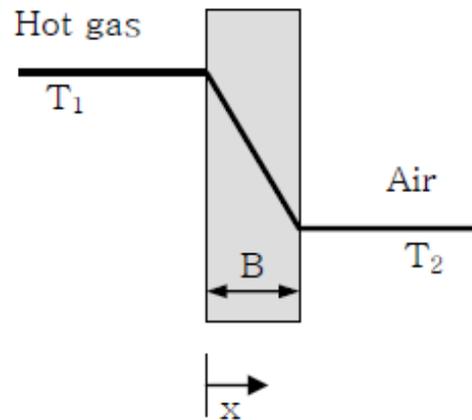
탱크로 부터의 열흐름
(탱크 내의 끓는 물이 존재)

10.2 정상 상태 전도

* 정상 상태 열전도와 열저항(thermal resistance)

- 열전도도 k 가 온도에 대해 일정한 값을 갖으며, 절연층의 두께를 B 라면 적분에 의해 다음을 유도할 수 있음

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad \rightarrow \quad dT = -\frac{q}{kA} dx \quad \rightarrow \quad \frac{q}{A} = k \frac{T_1 - T_2}{B - 0} = k \frac{\Delta T}{B}$$



- 열저항: 열전달 속도를 저항에 대한 구동력의 비로 표현할 때 열저항 R 을 도입 가능

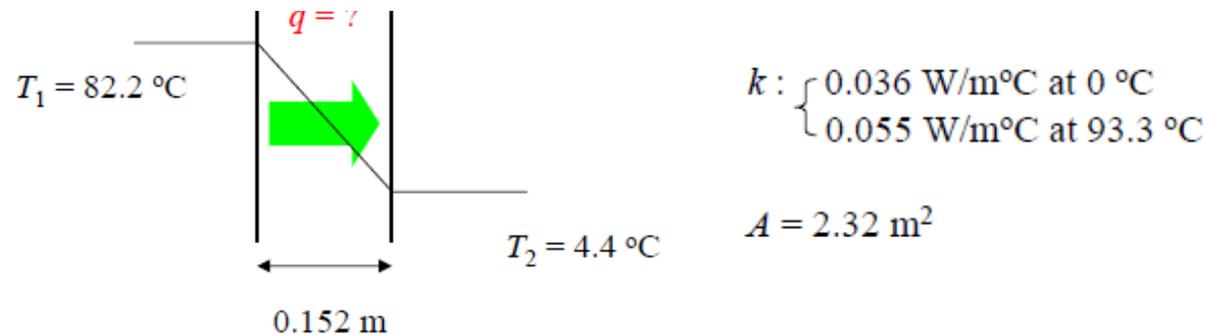
→ 열전도도 k 가 온도에 따라 선형으로 변할 때 T_1 과 T_2 에서의 산술평균을 취한 열전도도를 도입하여 열저항을 나타냄

$$\text{rate} = \frac{\text{driving force}}{\text{resistance}} \quad \rightarrow \quad \frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{R} \quad R(= B / \bar{k})$$

10.2 정상 상태 전도

* 예제 10.1

6 in 두께의 분말 코르크(cork) 층을 평면벽의 열절연층으로 사용한다. 코르크의 찬쪽 온도는 40°F 이고, 더운 쪽 온도는 180°F 이다. 그 코르크의 열전도도는 32°F 에서 $0.021 \text{ Btu/ft}\cdot\text{h}\cdot^{\circ}\text{F}$ 이고, 200°F 에서 0.032 이다. 벽의 면적은 25ft^2 이다. 벽을 통하는 열유량은 Btu/h 단위로 얼마인가?



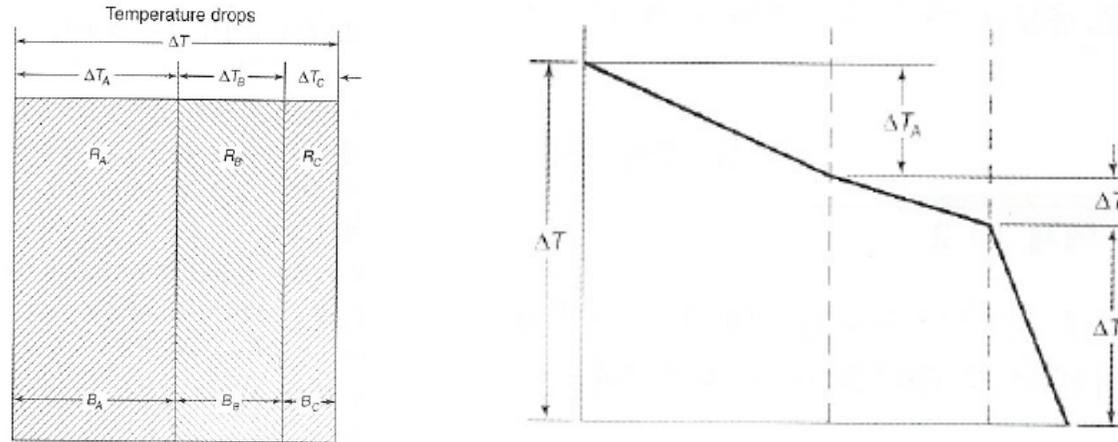
* 풀이: 코르크 층의 평균 온도를 계산한 뒤, 이 온도에서 열전달 계수를 내삽법으로 구한다. \rightarrow 정상 상태의 1차원 열전도 식에 대입하여 전열 속도 q 를 계산할 수 있다.

10.2 정상 상태 전도

* 직렬 복합 저항 (compound resistances in series)

- 서로 다른 재질로 구성된 벽을 가정

- 각 층간에 열적 접촉이 잘 되어 있어 계면에서의 온도 강하가 없다고 가정



- 각 층에서의 열전도 및 전체 온도 강하는 다음과 같음

$$\frac{q_A}{A} = \bar{k}_A \frac{\Delta T_A}{B_A}, \quad \frac{q_B}{A} = \bar{k}_B \frac{\Delta T_B}{B_B}, \quad \frac{q_C}{A} = \bar{k}_C \frac{\Delta T_C}{B_C} \quad \Delta T = \Delta T_A + \Delta T_B + \Delta T_C$$

$$\Delta T_A + \Delta T_B + \Delta T_C = \frac{q_A B_A}{A \bar{k}_A} + \frac{q_B B_B}{A \bar{k}_B} + \frac{q_C B_C}{A \bar{k}_C} = \Delta T$$

- 정상 상태의 열전도에서 $q_A = q_B = q_C = q$ 이므로,

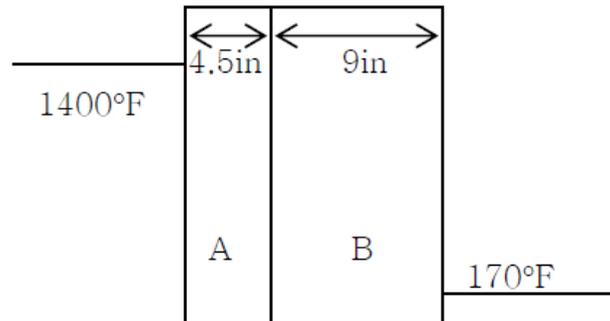
$$\frac{q}{A} = \frac{\Delta T}{B_A / \bar{k}_A + B_B / \bar{k}_B + B_C / \bar{k}_C} = \frac{\Delta T}{R_A + R_B + R_C} = \frac{\Delta T}{R}$$

- 직렬 저항을 통과하는 열흐름 속도는 여러 전기 저항을 통해 흐르는 전류와 명확히 유사함

$$\frac{\Delta T}{R} = \frac{\Delta T_A}{R_A} = \frac{\Delta T_B}{R_B} = \frac{\Delta T_C}{R_C}$$

10.2 정상 상태 전도

(예제 10.2) 평로벽이 4.5 in 두께의 Sil-o-cel 벽돌[열전도도 0.08 Btu/ft·h·°F] 층에 9 in 두께의 보통 벽돌층[열전도도 0.8 Btu/ft·h·°F]으로 보강하여 축적되었다. 노벽의 내부온도는 1400°F이고 노의 외부면 온도는 170°F이다.



A: $k = 0.08 \text{ Btu/ft}\cdot\text{h}\cdot\text{°F}$

B: $k = 0.8 \text{ Btu/ft}\cdot\text{h}\cdot\text{°F}$

(a) 노벽을 통한 열손실량은 얼마인가?

풀이) 각 노벽의 두께와 열전달계수로부터 열저항 R_A 와 R_B 를 구한 뒤, 총괄 열저항 $R = R_A + R_B$ 로 계산할 수 있다. 온도차를 계산한 뒤, 1ft^2 의 전열 면적을 가정하여 q 를 계산한다. $\rightarrow q/A = \Delta T/R$

(b) 내화 벽돌과 보통 벽돌 사이의 계면 온도는?

풀이) 계면 온도를 가정한 뒤, $q/A = \Delta T_A/R_A$ 로부터 ΔT_A 를 구한 뒤, 계면 온도를 구할 수 있다.

(c) 두 벽돌 사이에 접촉 불량 발생하여 그 접촉 저항이 $0.088 \text{ K}\cdot\text{m}^2/\text{W}$ 라 가정하면 열손실량은 얼마인가?

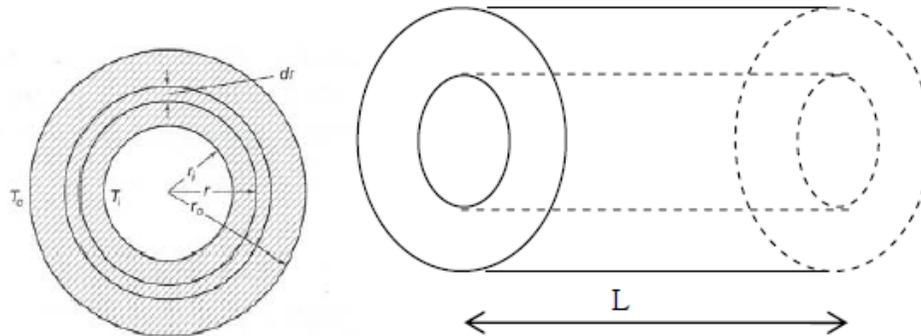
풀이) 문제에서 주어진 열저항 값을 총괄 저항에 더한 뒤, $q/A = \Delta T/R$ 로부터 구할 수 있다.

10.2 정상 상태 전도

* 원통을 통한 열흐름 (heat flow through a cylinder)

- 내경 r_i , 외경 r_o 인 원통형 실린더의 길이를 L 이라 가정

- 내부 표면 온도를 T_i , 외부 표면 온도를 T_o 라 할때, 정상 상태 열전달이 일어난다고 가정



- Fourier 법칙을 적용할 때, 전열 면적 A 는 다음과 같이 나타낼 수 있음

$$\frac{q}{A} = -k \frac{dT}{dr} \quad \xrightarrow{A=2\pi rL} \quad \frac{q}{2\pi rL} = -k \frac{dT}{dr} \quad \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi Lk}{q} dT \quad \xrightarrow{\text{적분}} \quad \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi Lk}{q} \int_{T_i}^{T_o} dT$$

- 적분을 통해 다음을 유도할 수 있으며, 로그 평균 표면적과 로그 평균 반지름을 정의하여 q 에 대한 식을 간략화할 수 있음.

$$\ln \frac{r_o}{r_i} = \frac{2\pi Lk}{q} (T_i - T_o) \quad \xrightarrow{\text{q에 대해 정리}} \quad q = \frac{2\pi Lk(T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} \quad q = k \frac{(2\pi L)(r_o - r_i)(T_i - T_o)}{(r_o - r_i) \ln(r_o/r_i)} \quad \xrightarrow{\text{정리}} \quad q = k \frac{\bar{A}_L (T_i - T_o)}{r_L - r_i}$$

$$\bar{A}_L = \frac{2\pi L(r_o - r_i)}{\ln(r_o/r_i)} = 2\pi L \bar{r}_L \quad \bar{r}_L \equiv \frac{r_o - r_i}{\ln(r_o/r_i)}$$

10.2 정상 상태 전도

* 로그 평균과 산술 평균의 관계

- 산술 평균은 r_o/r_i 가 1에 가까울수록 로그 평균과 유사한 값을 보임 (아래 그래프 참조)

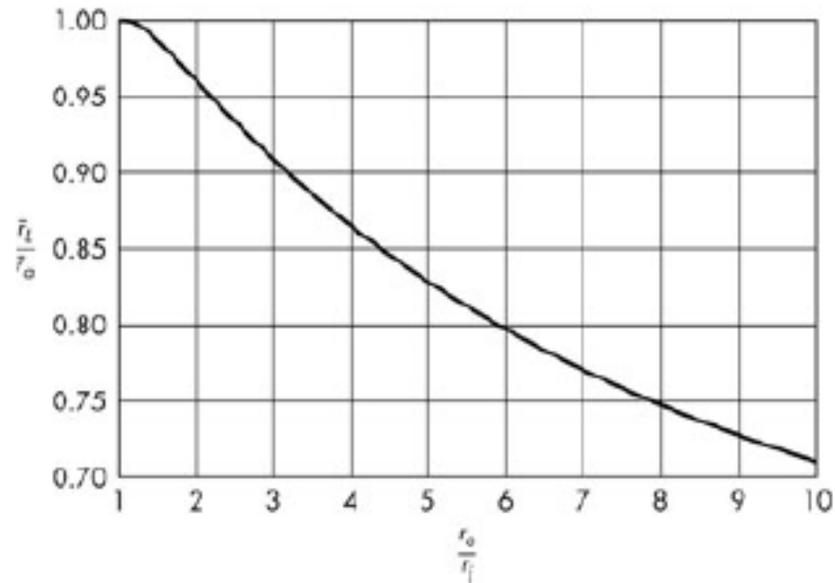
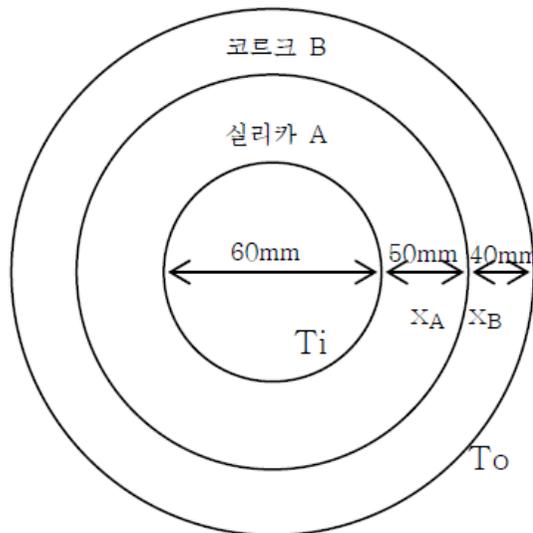


그림 10.3 산술 평균에 대한 로그 평균의 비 vs 내경에 대한 외경의 비

10.2 정상 상태 전도

(예제 10.3) 60 mm OD의 튜브가 열전도도 0.55 W/m ·°C인 실리카층 50 mm로, 그 다음 열전도도 0.05 W/m ·°C인 코르크층 40 mm로 절연되었다. 관의 외부표면 온도가 150°C이고, 코르크층 외부표면 온도가 30°C일 경우, 열손실을 W/m of pipe 단위로 계산하라.



$$k_A = 0.55 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$k_B = 0.05 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$T_i = 150^\circ\text{C}, \quad T_o = 30^\circ\text{C}$$

* 풀이: 실리카와 코르크 층 사이 계면의 온도를 T_x 라 가정한 뒤, 각 층에서의 열전달 속도 q_A , q_B 를 계산한다. 정상 상태에서 두 값이 같으므로 T_x 를 구할 수 있으며, 열전달 속도를 계산할 수 있다.

$$\text{For silica layer, } \bar{r}_L = \frac{80 - 30}{\ln(80/30)} \quad \bar{A}_A = 2\pi\bar{r}_L L \quad \longrightarrow \quad q_A = \frac{k_A \bar{A}_A (T_i - T_x)}{x_A} \quad q_A = 0.3522L(T_i - T_x)$$

$$\text{For cork layer, } \bar{r}_L = \frac{120 - 80}{\ln(120/80)} \quad \bar{A}_B = 2\pi\bar{r}_L L \quad \longrightarrow \quad q_B = \frac{k_B \bar{A}_B (T_x - T_o)}{x_B} \quad q_B = 0.7748L(T_x - T_o)$$

$$\text{At steady state, } q = q_A = q_B \quad \therefore \underline{q/L = 29.1 \text{ W}}$$

10.3 비정상 상태 열전도

* 비정상 상태의 열전도식을 푸는 방법

- Lumped Capacitance Analysis
- Exact Solutions: Separation of Variables, Combination of variables, ...
- Numerical Solutions: Finite Difference Methods, ...

10.3 비정상 상태 열전도

* 비정상 상태의 열전도(unsteady state heat conduction)

-비정상 상태의 열전도는 온도가 위치와 함께 시간의 함수인 경우에 해당
(시간이 지남에 따라 온도가 변하는 경우)

-비정상 상태 열전도의 지배 방정식(governing equation): 편미분 방정식의 형태로 얻어
짐 → 본 강의에서 해법은 skip하며, 지배 방정식의 유도 과정과 해(solution) 만 제시함

* 표면 온도가 일정한 경우 1차원 열흐름

- 초기 조건(initial condition): 초기 균일 온도 $T_a \rightarrow T(x, t_T=0) = T_a$

- 경계 조건(boundary condition): 양 표면을 가열하여 급격히 온도가 상승하고 표면 온도 T_s 로 유지됨 $\rightarrow T(x=0, t_T) = T_s, T(x=b, t_T) = T_s$

- 전도만을 고려한 에너지 수지식으로부터 다음과 같은 지배 방정식을 유도할 수 있음

Heat input – Heat output = Accumulation of heat

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- 열확산계수(thermal diffusivity)는 다음과 같이 정의됨 $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

- 위 식의 해는 무한히 긴 평판, 실린더, 구 등에 대해 Fourier 수(F_o)의 함수가 됨

$$\frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} = f(F_o)$$

$$F_o \text{ (Fourier number)} = \frac{\alpha t_T}{s^2} \text{ or } \frac{\alpha t_T}{r_m^2}$$

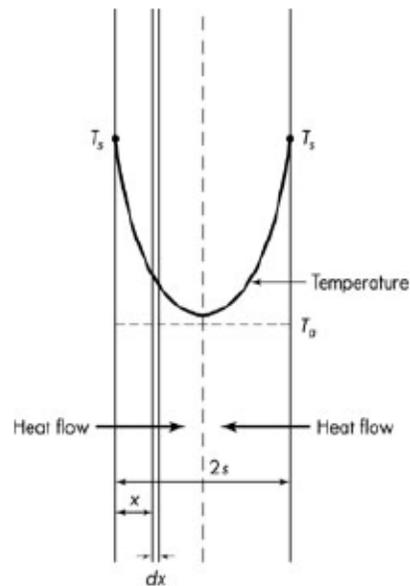
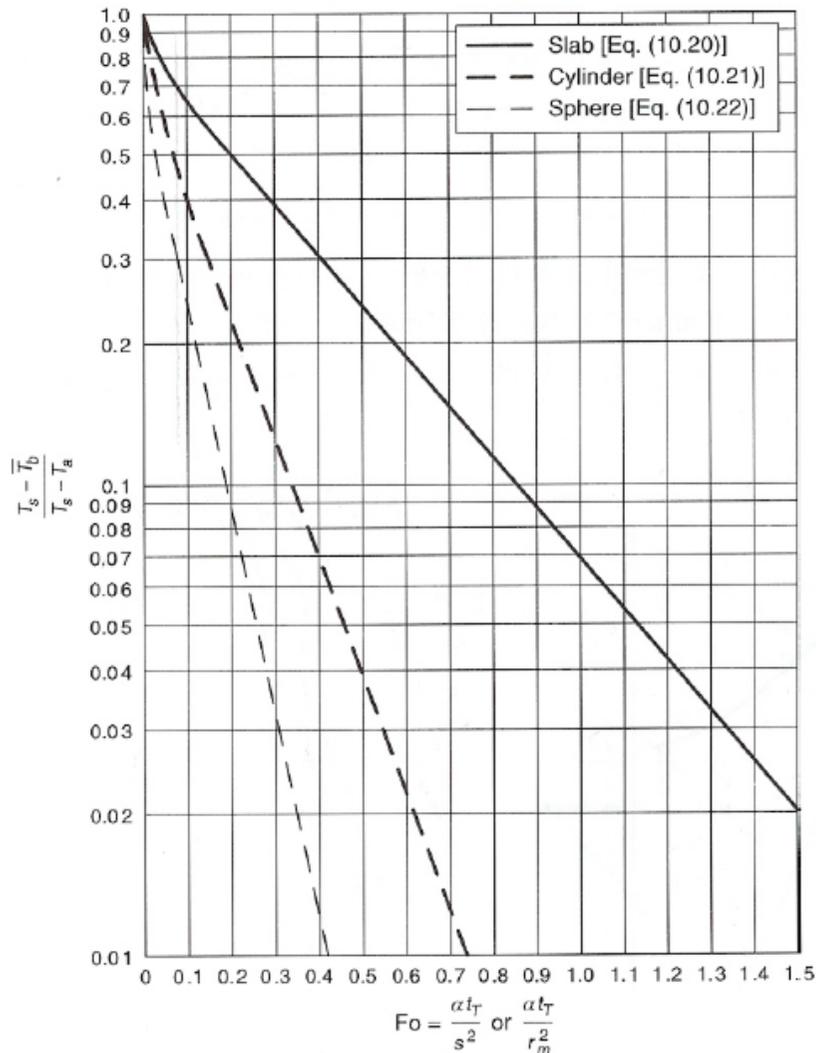


그림 10.4 고체 평판에서의 비정상상태 열전도

10.3 비정상 상태 열전도

* 표면 온도가 일정한 경우 1차원 열흐름

- 무한히 긴 평판에 대해 $f(\text{Fo})$ 의 형태는 교재 260 쪽 식 10.19 참조
- Fourier 수는 무차원 시간에 해당하는 양
- T_b 는 시간 t_T 에서 평판의 온도로, x 에 대해 적분한 값임



-한쪽 평면만 가열되는 경우에 반대 쪽 면으로의 열전달은 없으므로, 경계 조건은 $x = s$ 에서 $\partial T / \partial x = 0$ 이 됨

- 왼쪽 그래프는 세로축에 로그를 취한 semi-log plot(반대수 도표)으로, 세로 좌표의 값은 미달 온도 변화(unaccomplished temperature change)라 부름

$$\frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} = \frac{\text{어느 시간에 도달된 잔류분}}{\text{전체 온도 변화 가능분}}$$

-Fourier 수가 0.1 보다 클 때 해의 첫번째 항만이 유효해짐 \rightarrow 평판의 온도가 T_a 에서 T_b 까지 올라가는 데 걸리는 시간 t_T 를 구할 수 있음 (교재 261쪽 식 10.23 참조)

10.3 비정상 상태 열전도

* 표면 온도가 일정한 경우 1차원 열흐름

- 초기 조건(initial condition): 초기 균일 온도 $T_a \rightarrow T(x, t_T=0) = T_a$
- 경계 조건(boundary condition): 양 표면을 가열하여 급격히 온도가 상승하고 표면 온도 T_s 로 유지됨 $\rightarrow T(x=0, t_T) = T_s, T(x=b, t_T) = T_s$
- 두께를 아는 무한 평판에서 비정상 상태 열전도에 대한 해

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{4}{\pi} \left[e^{-a_1 Fo} \sin \frac{\pi x}{2s} + \frac{1}{3} e^{-9a_1 Fo} \sin \frac{3\pi x}{2s} + \frac{1}{5} e^{-25a_1 Fo} \sin \frac{5\pi x}{2s} + \dots \right]$$

- 평판 중간의 온도: 위 식에서 $x=s$ 를 대입하여 계산할 수 있음
- 평균 온도: 위 식을 $x=0$ 에서 $2s$ 까지 적분하여 임의의 시간 t_T 에서 평균 온도를 구할 수 있음

$$\begin{aligned} \frac{T_s - \bar{T}_b}{T_s - T_a} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{2s} \left[e^{-a_1 Fo} \sin \frac{\pi x}{2s} + \frac{1}{3} e^{-9a_1 Fo} \sin \frac{3\pi x}{2s} + \frac{1}{5} e^{-25a_1 Fo} \sin \frac{5\pi x}{2s} + \dots \right] dx \\ &= \frac{8}{\pi^2} \left[e^{-a_1 Fo} + \frac{1}{9} e^{-9a_1 Fo} + \frac{1}{25} e^{-25a_1 Fo} + \dots \right] \end{aligned}$$

- $Fo > 0.1$ 일때 위 급수 중 첫째 항만 유효하므로 평판의 평균 온도에 도달할 때까지 걸리는 시간은 다음과 같이 구해진다.

$$t_T = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2s}{\pi} \right)^2 \ln \frac{8(T_s - T_a)}{\pi^2 (T_s - \bar{T}_b)}$$

10.3 비정상 상태 열전도

예제 10.4. 초기에 섭씨 90 도인 8 cm 두께의 다공성 세라믹 판이 물 분사에 의해 양면에서 냉각되어 그 표면 온도가 섭씨 30 도까지 내려 간다. 고체의 밀도는 1050 kg/m^3 , 열용량 $c_p = 800 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$, 열전도도는 $1.8 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ 이다.

(a) 3분 후 중심 온도, 표면과 중심간 중간 지점의 온도를 구하라.

풀이) 주어진 평판의 물성 데이터와 3 분을 대입하여 Fourier 수를 계산할 수 있다. $x = s$ 인 중간 지점과 $x=s/2$ 에서의 온도 T 는 식 10.19에 대입하여 계산할 수 있다. 이 때 무한 급수에서 처음 두 항 정도만 취하여 근사값을 구한다.

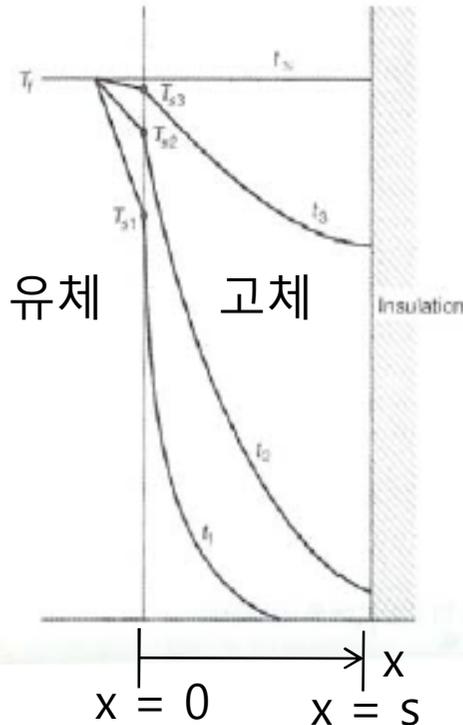
(b) 3분 후 평균 온도를 구하라.

풀이) 식 10.20을 활용하여 3분 후 평균 온도를 구할 수 있다. 또는 그림 10.5의 그래프를 활용할 수 있다.

10.3 비정상 상태 열전도

* 가변 표면 온도의 경우 열흐름

- 표면 온도가 일정하지 않고 시간에 따라 변하는 경우 온도 구배는 다음 그림과 같다.



- 왼쪽 그림에서 고체의 열전도도는 유체에 비해 작음을 가정
 → 고체 내 온도 구배가 유체 내 것보다 더 가파름

- 지배 방정식은 다음과 같음 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

- 초기 조건: $T(x, t_T = 0) = T_a$

- 경계 조건 1: $x = 0$ 에서 고체 표면의 온도 T_s 를 활용하여 다음과 같이 나타낼

$$\frac{q}{A} = h(T_f - T_s) = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}$$

- 경계 조건 2: $x = s$ 에서 절연체(insulator)와 접하고 있으므로, 전도에 의한 열전달이 0이 됨 → $\partial T / \partial x = 0$

(그림 10.6. 시간이 흐르면
 서 고체 표면 온도와 내부
 온도 모두 변함)

- 위와 같은 경우 온도에 대한 해는 Fourier 수와 Biot 수의 함수로 주어진다.

$$\frac{T_f - \bar{T}_b}{T_f - T_a} = f(F_o, Bi)$$

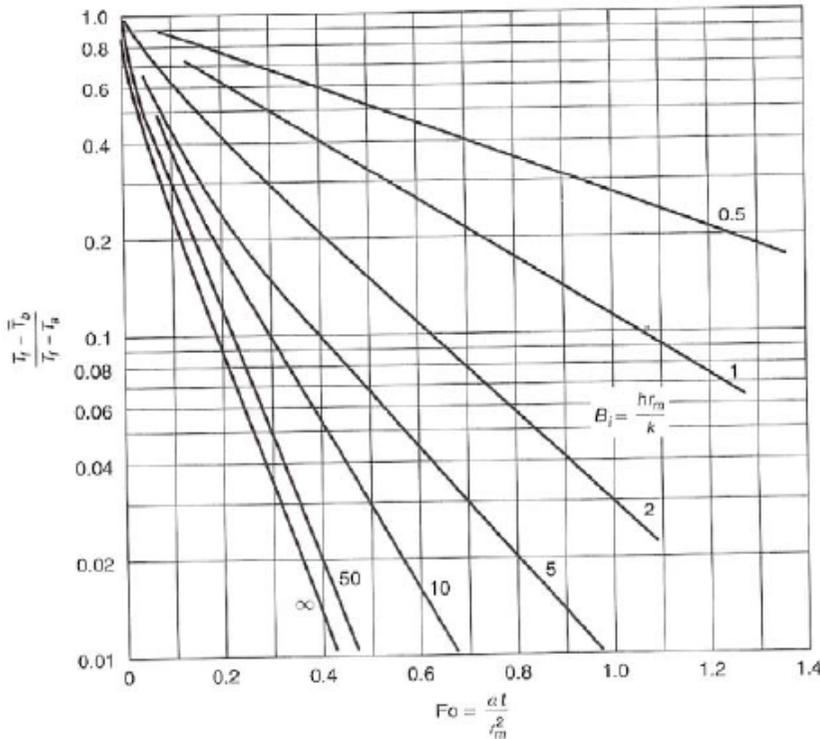
10.3 비정상 상태 열전도

- * 가변 표면 온도의 경우 열흐름
- Biot 수는 다음과 같이 정의됨

$$Bi = \frac{\text{열전달 내부저항}}{\text{열전달 외부저항}} \quad (\text{Biot number})$$

$$Bi = \frac{hs}{k} \quad (\text{무한 평판의 경우})$$

$$Bi = \frac{hr_m}{k} \quad (\text{구 또는 원통의 경우})$$



- Biot 수가 아주 클 경우($Bi > 20$): 외부 열전달 저항이 무시되며, 고체의 표면 온도는 T_s 에 가깝게 됨 \rightarrow 표면 온도가 일정한 경우의 해에 가까워짐

- Biot 수가 아주 작을 경우($Bi < 0.1$): 내부 열전달 저항이 거의 무시되므로, 고체의 내부 온도가 일정하다고 가정할 수 있음

\rightarrow lumped capacitance method를 활용 가능

- Biot 수가 중간 정도에 해당할 경우($0.1 < Bi < 1$): 내부 저항을 무시하며 다음과 같은 유효 열전달 계수를 사용 가능

$$\frac{1}{U} \cong \frac{1}{h} + \frac{r_m}{5k} \quad \leftarrow \text{식 10.30 (구에 대해 성립)}$$

(그림 10.8. 외부 열저항이 존재하는 경우 시간에 따른 구의 평균 온도 변화)

10.3 비정상 상태 열전도

(예제 10.5) 초기온도 80°C , 크기 5mm 플라스틱 구가 30°C 공기가 통과하는 유동층 내에서 냉각된다. 고체의 밀도는 1100 kg/m^3 , 열전도도는 $0.13\text{ W/m}\cdot^{\circ}\text{C}$, 비열은 $1700\text{ J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}$ 이다. 외부 열전달계수는 50 W/m^2 이다.

$$r_m = 2.5\text{mm} = 2.5 \times 10^{-3}\text{m}, \quad k = 0.13\text{W/m}\cdot^{\circ}\text{C}, \quad \rho = 1100\text{kg/m}^3$$

$$C_p = 1700\text{J/kg}\cdot^{\circ}\text{C}, \quad h = 50\text{W/m}^2\cdot^{\circ}\text{C}$$

- (a) 평균 온도가 섭씨 35 도에 도달하는 데 걸리는 시간은?
(풀이) 문제에서 위와 같은 데이터를 주었으므로, 평균 온도가 섭씨 35도일 때 미달 온도 변화를 계산할 수 있다. 한편, Biot 수를 계산한 뒤, 그림 10.8의 도표를 활용하여 Fo 를 추정할 수 있다. 이로부터 시간 t_f 를 계산한다.
- (b) 열전달에 대한 저항의 몇 할이 외부 경막에 존재하는가?
(풀이) 식 10.30으로부터 U 를 구하고 문제에서 주어진 h 데이터를 활용하여 U/h 를 계산한다
- (c) 섭씨 30 도로 일정한 표면 온도에 대해 (a) 부분을 다시 풀면?
(풀이) 이 경우 고체 내부의 열저항이 무한대인 상황에 해당함. $Bi = \infty$ 일 때 구체에서의 비정상 상태 열전달에 해당하므로, 그림 10.5의 그래프를 활용할 수 있다. Fo 값을 0.19로 어림하여 t_f 를 계산할 수 있다.

10.3 비정상 상태 열전도

* 전달된 총열량

- 고체 쪽으로 t_T 시간 동안 전달된 총 열량 $\rightarrow Q_T$
- 고체 단위 질량의 온도를 올리는데 필요한 열량 $\rightarrow C_p(\bar{T}_b - T_a)$
- 두께가 $2s$, 밀도 ρ 인 평판의 단위 질량당 면적

$$\rightarrow \frac{1}{s\rho}$$

- 따라서 단위 면적당 총 전열량은 다음과 같다.

$$\frac{Q_T}{A} = s\rho C_p(\bar{T}_b - T_a)$$

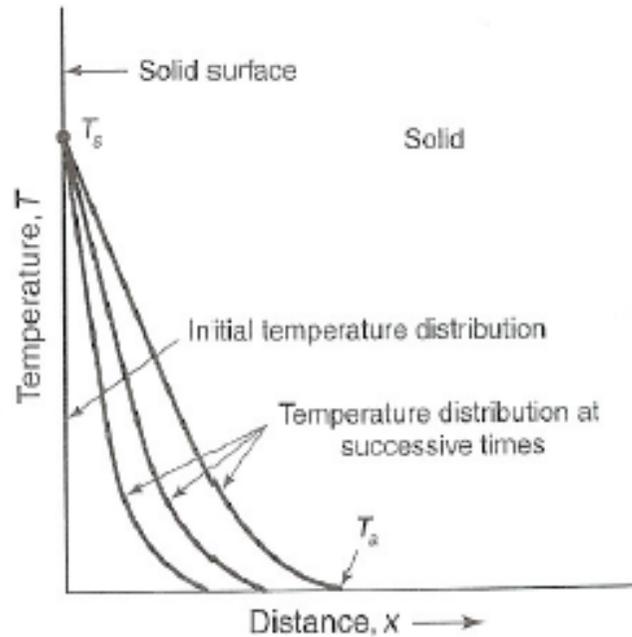
- 실린더와 구에 대해 다음이 성립한다.

$$\frac{Q_T}{A} = \frac{r_m \rho C_p (\bar{T}_b - T_a)}{2} \text{ (실린더의 경우)} \quad \frac{Q_T}{A} = \frac{r_m \rho C_p (\bar{T}_b - T_a)}{3} \text{ (구의 경우)}$$

10.3 비정상 상태 열전도

* 반-무한 고체(semi-infinite solids)

- 열이 무한 두께의 고체를 침투(penetration)하는 경우의 예: 초기 온도 T_a 인 굴뚝 내부를 T_s 의 뜨거운 기체로 가열 하는 경우 → 굴뚝 벽이 매우 두꺼운 경우 벽 외부의 표면 온도는 변하지 않음



- 지배 방정식은 다음과 같음 $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

- 초기 조건: $T(x, t=0) = T_a$

- 경계 조건 1: $T(x=0, t) = T_s$

- 경계 조건 2: $T(x=\infty, t) = T_a$

- 해는 다음과 같음

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz \quad Z = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

가우스 오차 적분, 확률 적분, error function

- 침투 거리(penetration distance): 위 해에서 좌변이 0.99일 때의 z 값에 해당하는 위치 x를 침투 거리라 정의함

$$x_p = 3.64\sqrt{\alpha t}$$

10.3 비정상 상태 열전도

* 반-무한 고체(semi-infinite solids)

- 계면을 통한 열흐름 속도의 계산: 다음과 같이 먼저 $x=0$ 에서 $(\partial T/\partial x)$ 을 구한 뒤 Fourier 법칙을 적용하여 계산할 수 있음

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2} dz \quad \xrightarrow{\text{미분하여 } x=0 \text{ 대입}} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{T_s - T_a}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

$$\left(\frac{q}{A} \right)_{x=0} = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{k(T_s - T_a)}{\sqrt{\pi\alpha t}}$$

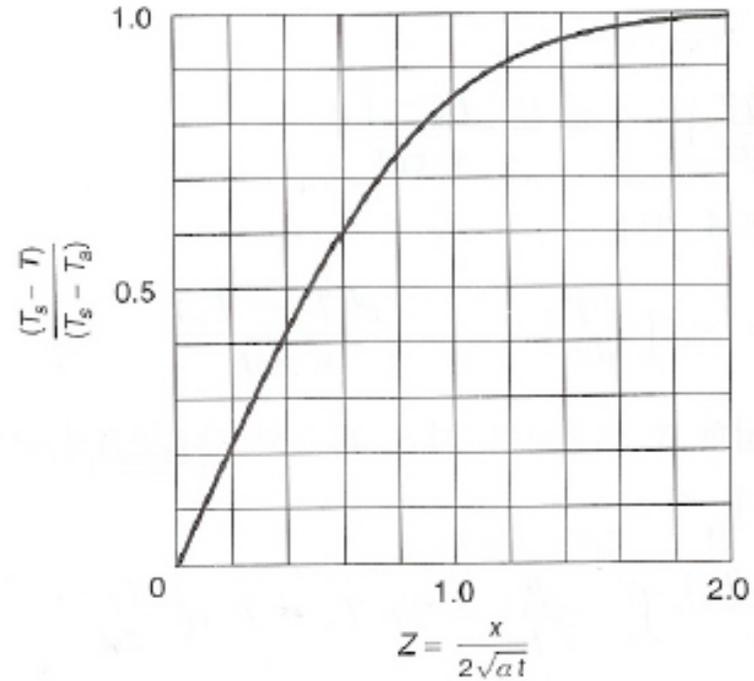
- 시간 t_T 동안 전달된 단위 총 열량을 Q_T 라면 위 식을 적분하여 계산할 수 있음

$$\left(\frac{Q_T}{A} \right) = \frac{k(T_s - T_a)}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^{t_T} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2k(T_s - T_a) \sqrt{\frac{t_T}{\pi\alpha}}$$

10.3 비정상 상태 열전도

* 반-무한 고체(semi-infinite solids)

- 반-무한 고체의 비정상 상태 가열에 해당하는 해의 변화



10.3 비정상 상태 열전도

* 참고: Self Similarity Solution Technique

- 무한 평판에서의 열전도와 같은 문제는 아래와 같이 새로운 변수를 도입하여 편미분 방정식을 상미분 방정식으로 변환하여 풀 수 있음.
- (편의상 교재에 표시된 초기 온도 T_a 를 T_i 로 표기하였음)

$$\begin{array}{l}
 \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad T = T_i \text{ at } t = 0, \text{ all } x \quad T(x, 0) = T_i \\
 T = T_s \text{ at } x = 0, t > 0 \quad T(0, t) = T_s \\
 T = T_i \text{ as } x \rightarrow \infty, t > 0 \quad T(\infty, t) = T_i
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{Let } \eta \equiv x/\sqrt{4\alpha t}}
 \begin{array}{l}
 \frac{d^2 T}{d\eta^2} + 2\eta \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad T(\eta = 0) = T_s \\
 T(\eta \rightarrow \infty) = T_i
 \end{array}$$

- 이 경우 초기 조건 및 경계 조건은 위와 같이 변함
- 적분을 2회 수행하여 아래와 같이 온도 T를 구할 수 있음

$$\ln \frac{dT}{d\eta} = -\eta^2 + C_1 \quad \longrightarrow \quad \frac{dT}{d\eta} = C_1 e^{-\eta^2} \quad \longrightarrow \quad T = C_1 \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + C_2$$

- 초기 조건 및 경계 조건을 대입하여 상수 C_1 과 C_2 를 구할 수 있음. 이 때 다음과 같은 error function의 정의가 필요함

$$\begin{array}{l}
 erf(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-u^2} du \\
 erf(0) = 0, erf(\infty) = 1
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad C_1 = \frac{2(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}}, \quad C_2 = T_s \quad \longrightarrow \quad$$

$$T(x, t) = \frac{2(T_i - T_s)}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta + T_s$$

$$\frac{T(x, t) - T_s}{T_i - T_s} = \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \int_0^\eta e^{-\eta^2} d\eta \equiv erf \eta = erf\left[\frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}\right]$$

10.3 비정상 상태 열전도

(예제 10.7) 갑작스런 한파가 대기 온도를 48시간 동안 -20°C 까지 하강시켰다. (a) 초기 대기 온도가 5°C 이었다면, 수도관의 동결 위험이 없도록 하려면 얼마나 깊이 묻어야 하는가? (b) 이들 조건하에서 침투거리는? 토양의 열확산계수는 $0.0011\text{m}^2/\text{h}$ 이다.

풀이) (a) 땅에서 수직인 방향이 무한히 길다고 가정하면, 무한 평판의 비정상 상태 열전도로 가정하여 문제를 풀 수 있다. 섭씨 0도 이상의 온도에서는 동결 위험이 없으므로, $T = 0^{\circ}\text{C}$ 일 때의 거리 x 를 구한다. 이 때 아래 조건을 활용할 수 있다.

$$\begin{array}{l} T_s = -20^{\circ}\text{C}, T_a = 5^{\circ}\text{C}, T = 0^{\circ}\text{C} \\ t = 48 \text{ hr}, \alpha = 0.0011 \text{ m}^2/\text{h} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{T_s - T}{T_s - T_a} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Z e^{-Z^2} dZ \quad Z = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}$$

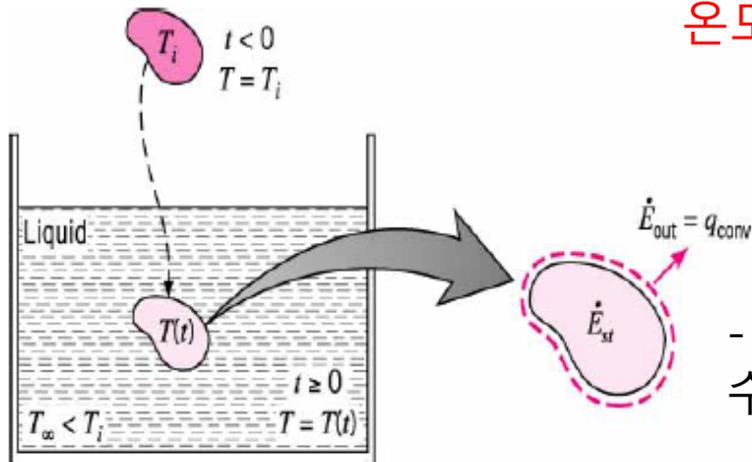
$T = 0$ 일 때 Z 를 구한 뒤, x 를 계산 가능.

(b) 침투 거리 x_p 의 정의를 활용하여 문제의 조건을 대입 후 계산할 수 있다.

10.3 비정상 상태 열전도

* 참고: 총괄 축전 용량법(Lumped Capacitance Analysis Method)

- 초기 온도 T_i 인 어떤 고체가 T 의 온도를 갖는 액체에 잠기는 상황을 가정.
- 열이 고체로부터 액체로 빠져나간다면 복사 효과를 무시할 때 에너지 수지식을 세울 수 있음 $\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{st}}{dt}$



- 고체의 표면적을 A_s , 열전달계수를 h 라 하고, **고체의 온도가 시간 만의 함수**라고 가정하면 다음이 성립한다.

$$0 - hA_s(T - T_\infty) = \rho VC_p \frac{dT}{dt} \longrightarrow \frac{\rho VC_p}{hA_s} \frac{dT}{dt} = -(T - T_\infty)$$

$t = 0, T = T_i$

- 새로운 변수 θ 를 도입하여 위 지배 방정식을 변환할 수 있다.

$$\frac{\rho VC_p}{hA_s} \frac{dT}{dt} = -(T - T_\infty) \xrightarrow{\theta = T - T_\infty} \frac{\rho VC_p}{hA_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

$t = 0, \theta_i = T_i - T_\infty$

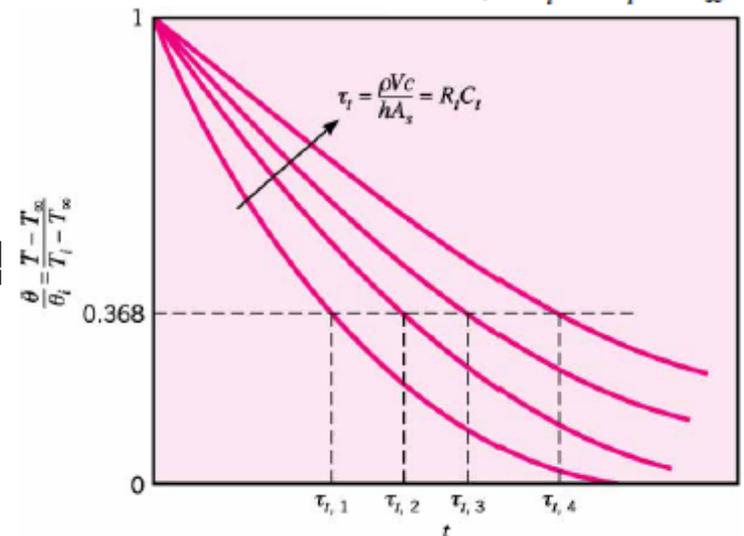
- 아래와 같이 θ 를 쉽게 구할 수 있다.

$$\frac{\rho VC_p}{hA_s} \ln \frac{\theta}{\theta_i} = -t \quad \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho VC_p}\right)t\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_t}\right)\right]$$

- 위에서 thermal time constant는 다음과 같이 정의됨

$$\tau_t = \left(\frac{1}{hA_s}\right)(\rho VC_p) = R_t C_t$$

Rt: the resistance to convective heat transfer
Ct: the lumped thermal capacitance of the solid



10.3 비정상 상태 열전도

* 참고: 총괄 축전 용량법 (Lumped Capacitance Analysis Method)

- 교재에서 반경 r_m 인 구를 가정하였으며, 아래 해에서 $A_s/V = 3/r_m$ 을 대입할 수 있음 (식 10.31, 10.32)

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left[-\left(\frac{hA_s}{\rho VC_p}\right)t\right] = \exp\left[-\left(\frac{t}{\tau_t}\right)\right]$$

- Biot 수가 1보다 아주 작은 경우 내부 열저항이 무시되므로, 고체 내부의 온도 구배가 없다고 가정할 수 있음. (이 경우 lumped capacitance method를 적용 가능)

